PART3　三角関数の最大・最小（2 倍角・半角の公式）

3　$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x\ (0\leqq x<\pi)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

Point Pickup

2 倍角・半角の公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \iff \sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \iff \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \iff \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

を用いて，関数を $\sin 2x$，$\cos 2x$ の 1 次式で表す。

第10講　PART3　確認問題

1　$y=2\sqrt{3}\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x\ \ (0\leqq x<\pi)$ の

最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

$x=$ ［ア］ のとき　最大値 $\dfrac{[イ]\sqrt{[ウ]}}{[エ]}$

$x=$ ［オ］ のとき　最小値 $\dfrac{\sqrt{[カ]}}{[キ]}$

［［ア］，［オ］の選択肢］

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{4}$　④ $\dfrac{\pi}{3}$

⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑦ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑧ $\dfrac{5}{6}\pi$

PART3　三角関数の最大・最小（２倍角・半角の公式）

3　$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x\ (0\leqq x<\pi)$ の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$$
$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2$$
$$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$$

$0\leqq x<\pi$ より　$0\leqq 2x<2\pi$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$

よって

$$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$$
$$-2\leqq 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 2$$

したがって　$0\leqq 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\leqq 4$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{6}$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$ より　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

ゆえに

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　最大値 4

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　最小値 0

第10講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑧，イ：5，ウ：3，エ：2，オ：④

カ：3，キ：2

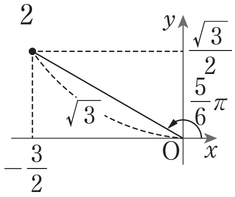
[解説]

$$y=2\sqrt{3}\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x \quad \text{[A]}$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-3\cdot\frac{\sin 2x}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{[B]}$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$0\leqq x<\pi$ より

$$\frac{5}{6}\pi\leqq 2x+\frac{5}{6}\pi<\frac{17}{6}\pi$$

よって　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq 1$

ゆえに　$-\sqrt{3}\leqq\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)\leqq\sqrt{3}$

したがって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

ここで　$\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)=1$ のとき

$$2x+\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{2}\pi \text{ より }\quad x=\frac{5}{6}\pi$$

$\sin\left(2x+\frac{5}{6}\pi\right)=-1$ のとき

$$2x+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi \text{ より }\quad x=\frac{\pi}{3}$$

よって　$x=\frac{5}{6}\pi$ のとき　最大値 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}$ のとき　最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[A]　2 倍角・半角の公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\Longleftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

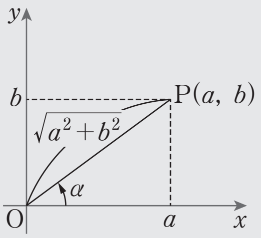
$\Longleftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\Longleftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

[B]　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$